Stochastische Finanzmarktmodelle und Instabilität von Finanzmärkten

Mark Kirstein[‡]

Buchenbach-Workshop, 4. - 7. Oktober 2011

21. September 2011

In short, the belief in efficient financial markets
blinded many if not most economists
to the emergence of the biggest bubble in history.
[...] the undiagnosed bubble has burst [...] and
the financial system has demonstrated its fragility.

Paul Krugman[1]

1 Einleitung

Mehrere Aufrufe bedeutender Ökonomen fordern besonders seit der Finanzkrise 2008 eine Öffnung der Ökonomie für neue Methoden und den Aufbau einer neuen ökonomischen Theorie auf stärkerer empirischer Grundlage. Neben dem o. g. Zitat aus Krugman (2009) sehen auch Colander et al. (2009) eine Teilschuld am Entstehen neuer (systemischer) Krisen bei der akademischen Profession. So wurde durch den Umgang mit den immer noch sehr begrenzten Erkenntnissen und Modellen und die diesen Fakt weitgehend ausblendende Kommunikation darüber nach außen, eine Kontrollillusion geschaffen. In diesem Vortrag werden darauf Bezug nehmend zwei gleichlaufende Entwicklungen dargestellt, wie man Risiko und Instabilität von Finanzmärkten ökonomisch modelliert. Im ersten Teil werden die Meilensteine stochastischer Finanzmarktmodelle der Preisevolution vorgestellt.

[‡]Diplomand, Institut für Wirtschaftspolitik, Universität Leipzig, `markkirstein@gmail.com`

[1]Krugman (2009).

Diese Entwicklung der stochastischen Finanzmarktmodelle zeigt, dass stochastische Prozesse zur Modellierung genutzt werden, die signifikant von Gauß-Prozessen abweichen, da sie u. a. deutlich mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern enthalten. Eine möglichst realitätsgetreue Abbildung starker Schwankungen steht dabei im Vordergrund. Mit den stabilen Lévy-Verteilungen steht eine geeignete Klasse bereit, die z. B. von Colander et al. (2009, S. 254) explizit empfohlen werden. Auf der anderen Seite lässt sich das hohe Maß an Instabilität als eine emergente Eigenschaft des komplexen Systems Finanzmarkt erklären. Der zweite Teil untersucht daher genauer die Ursachen für die Instabilität von Finanzmärkten. Die Endogenität der Instabilität dieses Systems wird durch die im ersten Teil vorgestellten Verteilungen und Prozesse hervorragend modelliert.

2 Meilensteine stochastischer Finanzmarktmodelle

2.1 Das Ur-Modell Bachelier (1900)

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Finanzmärkten beginnt im Jahre 1900 mit einer in vielerlei Hinsicht pionierhaften Arbeit des französischen Mathematikers Louis Bachelier, in der er folgendes Modell aufstellt.

Sei X_t der Preis eines Wertpapiers zum Zeitpunkt t, dann ist die Preisänderung I_t innerhalb eines Zeitschritts δt definiert als

$$I_t = \delta X_t = X_t - X_{t-\delta t}.$$

Die Preisdynamik lässt sich nun als eine Gaußsche Irrfahrt in diskreter Zeit $t \in \mathbb{N}$ wie folgt modellieren

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{t} I_k,$$

mit X_0 als Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ und unabhängig identisch Gauß-verteilter Inkremente $I_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Die Preisdynamik folgt also von ihrem Startwert X_0 an einer zufälligen Entwicklung, die durch Gauß-verteilte Inkremente beschrieben wird, was dazu führt, dass der Preis $X_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Speziell für eine kontinuierliche Zeitskala, d. h. $\delta t \to 0$, nennt man diesen Prozess auch Brownsche Bewegung oder Wiener-Prozess $(W_t)_{t \geq 0}$.

Bacheliers Modell der Preisevolution als Gaußsche Irrfahrt fußt im Wesentlichen auf Beobachtungen von Anleihe- und Rohstoffpreisen an der Pariser Börse und ruht auf den folgenden Annahmen:

1. Die Inkremente sind unabhängig und Gauß-verteilt, wodurch eine zufällige Gaußsche Irrfahrt als Modell anwendbar ist.

2. Die Summe dieser Inkremente ist wieder Gauß-verteilt.

Aus 1. und 2. folgt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) der Inkremente über einen endlichen Mittelwert und eine endliche Varianz verfügen muss.

2.2 Mandelbrot (1963) – Erste Erweiterung der Gaußschen Irrfahrt

Benoît Mandelbrot analysierte die Annahmen von Bacheliers Modell. Dabei nutzte er einen weitaus größeren Datensatz von vorwiegend Baumwollpreisen mit einem Umfang von ca. 50 Jahren auf Basis von Tageskursen. Aufgrund dieser besseren Datenlage konnte er Bacheliers Modellannahmen empirisch überprüfen und kam dabei zu interessanten Schlussfolgerungen. Zunächst zur Berechtigung der oben genannten Annahmen:

1. Die Unabhängigkeit der Inkremente ist empirisch weitgehend gerechtfertigt, die Annahme der Gauß-Verteilung dagegen nicht.

2. Die Eigenschaft einer Summe von Zufallsvariablen der gleichen Verteilungsfamilie anzugehören wie die einzelnen Zufallsvariablen, erfüllen die stabilen Verteilungen. Die Gauß-Verteilungsfamilie ist somit nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Klasse.

3. Das zweite Moment der Verteilung der Preisinkremente ist nicht endlich, d. h. die Preisinkremente besitzen keine endliche Varianz.

Mandelbrot zog daraus folgende Schlussfolgerungen:

1. Die Varianzen der Preisinkremente sind nicht endlich, somit ist die Annahme einer Gauß-Verteilung nicht gerechtfertigt.

2. Die Verteilung der Preisinkremente besitzt schwere Ränder, die einem Potenzgesetz folgen. Daraus folgt eine Unterschätzung der Häufigkeit großer Preisänderungen im Ur-Modell – ein weiterer Punkt gegen die Annahme einer Gauß-Verteilung der Inkremente.

3. Die Klasse der stabilen Verteilungen besitzt geeignete Eigenschaften zur Modellierung der Preisevolution, wegen 1. lässt es sich einschränken auf die nicht Gaußschen stabilen Verteilungen.

4. Diese Klasse nennt MANDELBROT Lévy-stabile Verteilungen bzw. Lévy-Verteilungen und sie wird durch vier Parameter beschrieben.

Die Klasse der Lévy-Verteilungen lässt sich wie folgt durch ihre charakteristische Funktion $\varphi(x)$ in Abhängigkeit von vier interpretierbaren Parametern darstellen:

$$\log(\varphi_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}(x)) = \begin{cases} -\gamma^{\alpha}|x|^{\alpha}(1 - i\beta * sign(x) * \tan\frac{\alpha\pi}{2}) \quad + i\delta x & \alpha \neq 1 \\ -\gamma \; |x| \; (1 + i\beta * sign(x) * \frac{2}{\pi} * \ln|x|) + i\delta x & \alpha = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Aus Gleichung (1) lassen sich die vier Parameter erkennen, deren konkrete Ausprägungen spezielle Verteilungen erzeugen. Zur Bedeutung der Parameter (BUTTLER und PAPENBROCK, 2007; RISKGLOSSARY, 2005):

- α ist ein Stabilitätsindex, der die Schwere der Ränder bestimmt, je kleiner α ist, desto schwerer werden die Ränder der Verteilung, $0 < \alpha \leq 2$, für $\alpha = 2$ ist das zweite Moment noch endlich, für $1 < \alpha < 2$ ist das zweite Moment dann schon unendlich und für $0 < \alpha \leq 1$ ist bereits das erste Moment unendlich,

- β ist ein Schiefeparameter, $\beta \in [-1, 1]$, für $\beta = 0$ handelt es sich um eine symmetrische Verteilung, für $\beta < 0$ ist der linke schwerer als der rechte Rand,

- γ ist ein Skalierungsparameter, $\gamma > 0$,

- δ ist ein Lageparameter, $\delta \in \mathbb{R}$, für $\alpha > 1$ entspricht δ dem Mittelwert der Verteilung.

Die Familie der Lévy-Verteilungen $\varphi_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ ist stabil, d. h. eine Summe von unabhängigen, identisch Lévy-verteilten Zufallsvariablen mit gleichem Parameter α ist wieder eine Lévy-Verteilung mit Parameter α. Aus der Stabilitätseigenschaft ergeben sich zwei günstige Eigenschaften. Erstens ist die Reskalierung von kurzen auf längere Zeiträume möglich. Zweitens kann der „Portfoliowert als Summe der einzelnen Positionen ermittelt“ werden (BUTTLER und PAPENBROCK, 2007, S. 3). Modelliert man Preisinkremente durch stabile Lévy-Verteilungen ist die Schwere der Ränder über α, die Schiefe über β und die Zeitskala über γ kalibrierbar. Diese

Eigenschaften machen stabile Lévy-Verteilungen zu einem ausgezeichneten Instrument für die Modellierung ökonomischer Zeitreihen. Eine geschlossene Darstellung der WDF ist nur für die drei folgenden Parameterkonstellationen bekannt:

1. für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ ergibt sich eine Cauchy-Verteilung,
2. für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $|\beta| = 1$ eine Lévy-Verteilung und
3. für $\alpha = 2$ ergibt sich eine Gauß-Verteilung, was die Gauß-Verteilung zu einem Spezialfall der stabilen Lévy-Verteilungen macht.

2.3 Mantegna (1991) – Gestutzte Lévy Irrfahrt

Das Modell der Lévy Irrfahrten ist eine wesentliche Weiterentwicklung der Gaußschen Irrfahrt, besitzt jedoch eine Schwäche: in endlichen Datensätzen wird stets eine endliche Varianz beobachtet. Deshalb wurden sogenannte gestutzte Lévy Irrfahrten (engl. *truncated Lévy flight*, TLF) eingeführt. Eine gestutzte Lévy Irrfahrt $T(x)$ ist ein stochastischer Prozess, der wie folgt definiert ist:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x < -l, \\ c_1 L(x) & -l \leq x \leq l, \\ 0 & x > l, \end{cases} \tag{2}$$

mit der symmetrischen stabilen Lévy-Verteilung

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma q^\alpha) \cos(qx) dq, \tag{3}$$

c_1 als Normierungskonstante und l als Länge des gestutzten Bereichs. Der TLF besitzt schwere Ränder und eine endliche aber noch genügend große Varianz, wodurch er die vormals technischen Probleme löst. Er besitzt das Potenzial großer Preisbewegungen innerhalb kurzer Zeiträume und ist daher in der Lage, die oft zu beobachtenden Boom&Bust-Zyklen der Finanzmärkte abzubilden.

3 Ursachen für die Instabilität von Finanzmärkten

Die häufigen Boom&Bust-Zyklen mit aufeinanderfolgenden großen Kurssprüngen, Blasen und Crashs zeigen die offensichtliche Instabilität von Finanzmärkten. In der neoklassischen Gleichgewichtstheorie finden sich keine befriedigenden Erklärungen für diese Phänomene. Vielversprechende Einblicke liefert dagegen die moderne Komplexitätsforschung. Ausgehend von der System- und Komplexitätstheorie wird der Finanzmarkt als ein komplexes System verstanden, bestehend aus vielen heterogenen Akteuren, das aus sich selbst heraus neue emergente Eigenschaften generiert, wie die angesprochenen Boomphasen und großen Kurseinbrüche. Diese Sichtweise spricht dem komplexen System Finanzmarkt also grundsätzlich das Potenzial für endogene Instabilität zu. Dabei wird kein Gleichgewichtskonzept benötigt und es werden evolutionäre Konzepte inkorporiert, beispielsweise bezüglich der Strategiewahl der Akteure und der sich ausbildenden kollektiven Muster. Eine charakteristische Eigenschaft komplexer Systeme sind das Auftreten von Potenzgesetz-Verteilungen. Vielfältige Ergebnisse Agenten-basierter Simulationen bringen nun genau diese Potenzgesetz-Zusammenhänge hervor. Die Untersuchungsmethode der Agenten-basierten Simulation bildet zudem die Existenz heterogener Akteure ab, indem sie sie rechnergestützt interagieren lässt und die sich ausbildenden (statistischen) Regelmäßigkeiten einer Analyse zugänglich macht. Diese Fakten zeigen zum einen den theoretischen Nutzen stabiler Lévy-Verteilungen als auch die Zweckmäßigkeit der Sichtweise des Finanzmarktes als komplexes System.

4 Fazit

Stabile Lévy-Verteilungen und die Betrachtungsweise des Finanzmarktes als ein komplexes System haben sich als wertvolle theoretische Konzepte erwiesen für das Verständnis der realen ökonomischen Prozesse. Eine verbesserte Abbildung von Instabilität (also Risiko) in ökonomischen Modellen kann in erster Linie die wissenschaftliche Qualität weiterentwickeln, als auch die öffentliche Wahrnehmung des Fachs korrigieren. Darüber hinaus steht mit der Agenten-basierten Simulation eine Forschungsmethode bereit, die die oben genannten empirischen Tatsachen gut reproduzieren kann.

Literaturverzeichnis

Bachelier, Louis (1900). *Théorie de la speculation.* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3.(17):21–86.

Buttler, Michael und J. Papenbrock (2007). *Die α-stabile Welt.* Finanz Betrieb News, 5:2–5.

COLANDER, DAVID, M. GOLDBERG, A. HAAS, K. JUSELIUS, A. KIRMAN, T. LUX und B. SLOTH (2009). *The financial crisis and the systemic failure of the economics profession*. Critical Review, 21(2-3):249–267.

KRUGMAN, PAUL R. (2009). *How did economists get it so wrong?*. The New York Times.

MANDELBROT, BENOÎT B. (1963). *The Variation of Certain Speculative Prices*. The Journal of Business, 36(4):394–419.

MANTEGNA, ROSARIO N. (1991). *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange*. Physica A, 179:232–242.

RISKGLOSSARY (2005). *Stable Paretian Distributions*. Risk Glossary.